

2020年天津南开区高三二模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 复数 $z = \frac{4+3i}{3-4i}$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应点的坐标为 ().

A. (1, 0)

B. (0, 1)

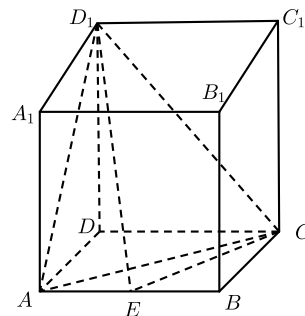
C. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ D. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ 2. 某中学高一、高二、高三年级的学生人数之比依次为6:5:7, 防疫站欲对该校学生进行身体健康调查, 用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 n 的样本, 样本中高三年级的学生有21人, 则 n 等于 ().

A. 35

B. 45

C. 54

D. 63

3. 方程 $x^2 + y^2 - kx + 2y + k^2 - 2 = 0$ 表示圆的一个充分不必要条件是 ().A. $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $k \in (2, +\infty)$ C. $k \in (-2, 2)$ D. $k \in (0, 1]$ 4. 设 $a = 2^{\ln 2}$, $b = -\log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$ 5. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是面积为2的正方形, 该长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$, 点 E 为棱 AB 的中点, 则三棱锥 $D_1 - ACE$ 的体积是 ().A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 1

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 以双曲线 C 的右焦点 F 为圆心, a 为半径作圆 F , 圆 F 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 则 $\angle MFN =$ ().A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

7. 某学校食堂为了进一步加强学校疫情防控工作, 降低学生因用餐而交叉感染的概率规定: 就餐时, 每张餐桌 (如图) 至多坐两个人, 一张餐桌坐两个人时, 两人既不能相邻也不能相对 (即二人只能坐在对角线的位置上). 现有3位同学到食堂就餐, 如果3人在1号和2号两张餐桌上就餐 (同一张餐桌的4个座位是没有区别的), 则不同的坐法种数为 ().



A. 6

B. 12

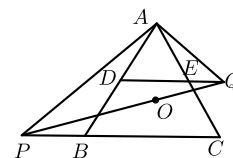
C. 24

D. 48

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, 且与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 则函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的一个单调减区间为 ().

A. $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ B. $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ D. $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

9. 如图, 在边长 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 中, D, E 分别是边 AB, AC 的中点, O 为 $\triangle ABC$ 的中心, 过点 O 的直线 l 与直线 BC 交于点 P , 与直线 DE 交于点 Q , 则 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ 的取值范围是 ().

A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-\infty, \frac{9}{2})$ D. $(-\infty, \frac{9}{2}]$ 

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 已知集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$, $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

11. 若 $(x^2 + \frac{1}{ax})^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

12. 过点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 在 y 轴上的截距为 _____.

13. 一袋中装有6个大小相同的黑球和白球. 已知从袋中任意摸出2个球, 至少得到1个白球的概率是 $\frac{4}{5}$, 则袋中白球的个数为 _____; 从袋中任意摸出2个球, 则摸到白球的个数 X 的数学期望为 _____.

14. 已知 $ab > 0$, 则 $\frac{(a^2 + 4b^2)^2 + 2(a^2 + 4b^2) + 5}{4ab + 1}$ 的最小值为 _____.

15. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数

$g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} + 1)^2 - a - 1, & x > 0 \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题

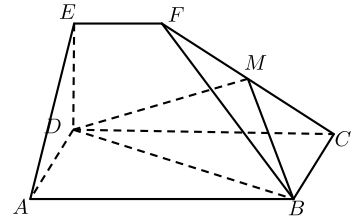
(本大题共5小题, 共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a^2 + c^2 = b^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}ac$.

(1) 求 $\cos B$ 及 $\tan 2B$ 的值.

(2) 若 $b = 3, A = \frac{\pi}{4}$. 求 c 的值.

17. 如图所示, 平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = 45^\circ$, 四边形 $CDEF$ 为直角梯形, $EF \parallel DC$, $ED \perp CD$, $AB = 3EF = 3$, $ED = a$, $AD = \sqrt{2}$.



- (1) 求证: $AD \perp BF$.
- (2) 若线段 CF 上存在一点 M , 满足 $AE \parallel$ 平面 BDM , 求 $\frac{CM}{CF}$ 的值.
- (3) 若 $a = 1$, 求二面角 $D - BC - F$ 的余弦值.
18. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.
- ① 求实数 m 的取值范围.
- ② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

19. 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 + b_2 = 7$, $S_5 b_2 = 50$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$, $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.
- ① 求 T_n .
- ② 求证: $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i - i}} < 2$.

20. 设函数 $f(x) = \frac{k}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$, $k \in \mathbf{R}$.
- (1) 若 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点, 求 k 的值及 $f(x)$ 单调区间.
- (2) 设 $g(x) = (x+1)\ln(x+1) + f(x)$, 若 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增函数, 求实数 k 的取值范围.
- (3) 证明: 当 $p > 0$, $q > 0$ 及 $m < n (m, n \in \mathbf{N}^*)$ 时,
- $$\left[\frac{p+q}{p^{2m-1}} \sum_{i=1}^{2m-1} (-1)^{i-1} p^{2m-1-i} q^{i-1} \right]^{2n-1} > \left[\frac{p+q}{p^{2n-1}} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i-1} p^{2n-1-i} q^{i-1} \right]^{2m-1}.$$